Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 2^oP/2013 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios I - teste na segunda, 24/9

1. Um pêndulo elástico consiste numa massa m capaz de oscilar num plano vertical suspensa por uma mola de constante elástica k e comprimento natural l.

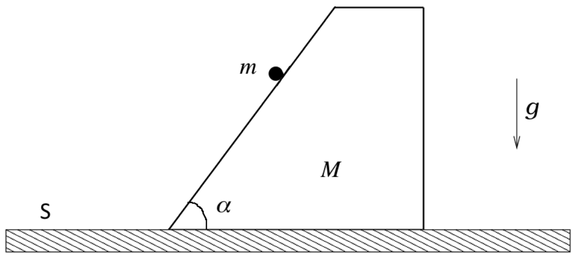
   a) Escolhendo coordenadas generalizadas convenientes, obtenha a Lagrangiana e as equações de Lagrange.

   b) Interprete o significado físico dos termos que aparecem nestas equações. Verifique ainda se, nos limites adequados, seus resultados se reduzem corretamente aos casos de um pêndulo simples e/ou uma mola simples.

2. Uma conta de massa m desliza sem atrito sobre uma cunha reta de massa M e ângulo α fixo, a qual por sua vez desliza também sem atrito sobre uma superfície horizontal S (fig).

   a) Considerando como coordenadas a posição horizontal X da cunha e as posições horizontal x e vertical y da conta com relação a um referencial fixo em S, exprima o(s) vínculo(s) relevante(s) e explique se são holônomos ou não. Defina um novo conjunto de coordenadas independentes.

   b) Escreva a Lagrangiana usando este conjunto mínimo de coordenadas, e encontre as equações de movimento. Discuta como será o movimento.



3. Na chamada *eletrodinâmica de Weber*, uma teoria que concorreu com a de Maxwell no séc XIX, a força entre duas cargas elétricas puntiformes em movimento seria dirigida ao longo da linha que as une, com magnitude

$$F = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 + \frac{r\ddot{r}}{c^2} - \frac{\dot{r}^2}{2c^2}\right\},$$

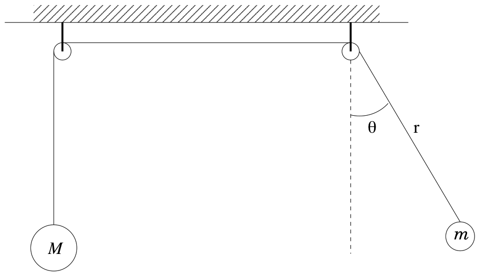
   onde r é a distância entre as cargas. Determine o potencial generalizado $U(r, \dot{r})$ associado a esta força.

4. Utilizando a função de dissipação de Rayleigh, obtenha as equações de movimento para um pêndulo duplo (exemplo 1.2.4, p. 11 e 1.5.3, p.28) no caso em que levamos também em conta forças de dissipação $\mathbf{F}_i = -b\mathbf{v}_i$. linearmente proporcionais à velocidade de cada massa.

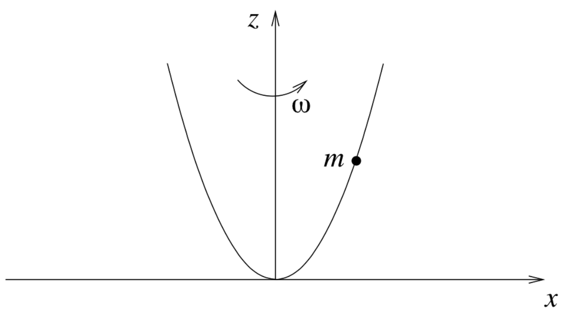
5. Considere a chamada máquina de Atwood oscilante (v. fig) - (M só se move verticalmente). Usando as coordenadas indicadas na figura, mostre que (a menos de uma constante que pode ser descartada porque não afeta as equações de Lagrange) a lagrangiana é

$$L = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - gr(M - m\cos\theta)$$

   e escreva as equações de Lagrange.



6. Uma conta de massa m está restrita a mover-se ao longo de um arame rígido e liso. O arame está num plano vertical, num campo gravitacional uniforme $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$, e tem a forma de uma parábola cuja equação é $z = x^2/2R$, onde R é uma constante positiva. Se o arame é posto a girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo vertical z, obtenha a lagrangiana e as equações de Lagrange para a conta.



7. Considere a máquina representada na figura abaixo: duas massas m_1 estão ligadas por hastes rígidas de comprimento a a um ponto fixo A de um eixo vertical, e também a uma terceira massa m_2, a qual pode deslizar ao longo do eixo. As hastes também estão fixadas de modo a se manterem no mesmo plano vertical. Assim, o conjunto forma um losango, cujo ângulo θ varia de acordo com a altura da massa m_2.

   Suponha que o conjunto como um todo seja colocado para rodar a uma velocidade angular ω fixada externamente. Desprezando forças de atrito, e também a massa das hastes:

   a) Relacione explicitamente todos os vínculos holônomos satisfeitos pelas coordenadas x, y, z das 3 massas. Quantas coordenadas independentes tem este sistema?

   b) Escreva a Lagrangeana do sistema, e encontre sua eq. de movimento.